Μαθημα 10ο 23/03/2018

$f: D \longrightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ μιγαδική συνάρτηση.

δηλ. $f(z) \in \mathbb{C}$, $z \in D \subset \mathbb{C}$

$z = x + yi$ αλγεβρική μορφή (δηλ. $(x,y) \in \mathbb{R}^2$) $(z = Re z + i Im z)$

και $f(z) = \underbrace{Re(f(z))}_{\substack{=(Re f)(z) \\ = Re f(z)}} + i\, Im(f(z))$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Re f(x+yi) \\ Im f(x+yi) \end{pmatrix}, \quad (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

ένα διανυσματικό πεδίο με πεδίο ορισμού το $D \subset \mathbb{R}^2$ στον $\mathbb{R}^2$

και γράφουμε $f(x+yi) = u(x,y) + i v(x,y)$ με $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$
και $u, v : D \longrightarrow \mathbb{R}$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $D \subset \mathbb{C}$ $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$ σημ. συσσ. του D

(δηλ. $\exists$ $(z_n) \subset D \setminus \{a\}$: $\underbrace{z_n \longrightarrow a}_{|z_n - a| \longrightarrow 0}$)

Τότε, λέμε ότι η f συγκλίνει στο $b \in \mathbb{C}$ όταν z τείνει στο a

$$f(z) \longrightarrow b \text{ για } z \longrightarrow a \text{ ή } \lim_{z \to a} f(z) = b \text{ αν}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall z \in D, \ 0 < |z-a| < \delta : |f(z) - b| < \varepsilon$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

1) Το όριο b όταν $f(z) \to b$ για $z \to a$ είναι ΜΟΝΑΔΙΚΟ.

2) $\lim_{z\to a} f(z) = b \Leftrightarrow \lim_{z\to a} (f(z)-b) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim_{z\to a} |f(z)-b| = 0 \Leftrightarrow \lim_{z\to a} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} b$

και το $\lim_{z\to a} f(z) = \operatorname{Im} b \Leftrightarrow \forall (z_n) \subset D\setminus\{a\}$ και

$z_n \to a : f(z_n) \to b$

3) (Εξήγηση μιας ισοδυναμίας του (2))

$\lim_{z\to a} f(z) = b \Leftrightarrow$ (Θυμήσου ότι $|x+iy| = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$)

$\Longleftrightarrow \lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \underbrace{\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}_{(=f)}(x,y) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$a = a_1 + a_2 i$
$b = b_1 + i b_2$

$\underset{\text{A.Π.III}}{\Longleftrightarrow} \lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} u(x,y) = b_1$ και $\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} v(x,y) = b_2$

4) $\lim_{z\to a} f(z) = b \Rightarrow \lim_{z\to a} |f(z)| = |b|$

$[\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall z \in D, 0 < |z-a| < \delta : |f(z) - b| < \varepsilon$ και $\big|\underbrace{|f(z)|}_{=c} - |b|\big| \leq \underbrace{|f(z)-b|}_{=c}$

(5) $\lim_{z\to a} f(z) = b$, $\lim_{z\to a} g(z) = c \Rightarrow \lim_{z\to a} (f+g)(z) = b+c$

$$(f\cdot g)(z) = bc$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(z) = \frac{b}{c}, \; c\neq 0$$

[π.χ. $|f(z)+g(z)-b-c| \leq |f(z)-b| + |g(z)-c|$]

Παράδειγμα

(a) $\lim_{z\to a} c = c$ (δηλ. η σταθ. συνάρτηση $f(z)=c$, $z\in\mathbb{C}$ έχει σε κάθε σημείο a, όριο το c)

(β) $\lim_{z\to a} z = a$ $\left[\,|z-a| \leq |z-a| < \delta := \varepsilon\,\right]$

(γ) $\lim_{z\to a} \mathrm{Re}z = \mathrm{Re}a$ $\left[\,\underbrace{|\mathrm{Re}z - \mathrm{Re}a|}_{\mathrm{Re}(z-a)\ (*)} < \varepsilon\right.$

και $|\mathrm{Re}(z-a)| \leq |z-a| < \delta := \varepsilon$

(*) Η $\mathrm{Re}: \mathbb{C}\to\mathbb{R}$ με $\mathrm{Re}z = \mathrm{R}(x+yi) = x$,
είναι $\mathbb{R}$- γραμμική, δηλ $\forall\, \lambda,\mu\in\mathbb{R}$ $\forall\, z,w\in\mathbb{C}$

$$\mathrm{Re}(\lambda z + \mu w) = \mathrm{Re}\big(\lambda(\mathrm{Re}z + i\,\mathrm{Im}z) + \mu(\mathrm{Re}w + i\,\mathrm{Im}w)\big) =$$

$$= \mathrm{Re}\big(\underbrace{\lambda \mathrm{Re}z + \mu \mathrm{Re}w}_{\in\mathbb{R}} + i(\underbrace{\lambda \mathrm{Im}z + \mu \mathrm{Im}w}_{\in\mathbb{R}})\big) =$$

$$= \lambda \mathrm{Re}z + \mu \mathrm{Re}w$$

δ) $\lim\limits_{z\to a} \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} a$

ε) $\lim\limits_{z\to a} \bar{z} = \bar{a}$

ΑΣΚΗΣΗ

στ) $\lim\limits_{z\to a} |z| = |a|$

ζ) $\lim\limits_{z\to a} z^n = a^n$

η) $\lim\limits_{z\to a} \dfrac{1}{z^n} = \dfrac{1}{a^n}$

αν $n \geq m$ τότε: ισχύει και για $a=0$

θ) $\lim\limits_{z\to a} \dfrac{z^n-a^n}{z^m-a^m} = \dfrac{n}{m} a^{n-m}$ για $a\neq 0$.

$\left[z^n - a^n = (z-a)\sum\limits_{k=0}^{n-1} z^k a^{n-k-1} \right]$ ΑΣΚΗΣΗ

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} z^{k+1} \underbrace{a^{n-k-1}}_{n-(k+1)}}_{= \sum_{k=1}^{n} z^k a^{n-k}} - \sum_{k=0}^{n-1} z^k a^{n-k}$$

$$\frac{z^n-a^n}{z^m-a^m} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} z^k a^{n-k-1} \cancel{(z-a)}}{\sum_{j=0}^{m-1} z^j \cdot a^{m-j-1} \cancel{(z-a)}} = \frac{na^{n-1}}{ma^{m-1}}$$

(i) Το $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\bar z}{z} \nexists$: Με την αλγεβρική μορφή $z=x+iy$ έχουμε:

$$\frac{\bar z}{z} = \frac{\bar z^2}{|z|^2} = \frac{(x-iy)^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2-y^2-2ixy}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + i\,\frac{-2xy}{x^2+y^2} \quad \text{και} \quad \lim_{z\to 0}\frac{\bar z}{z} = b_1 + i b_2 \iff$$

$$\iff \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = b_1}_{\nexists} \ \wedge\ \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-2xy}{x^2+y^2} = b_2}_{\nexists}$$

(κ) Προφανώς, για να μην υπάρχει ένα όριο μιας συνάρτ. αρκεί να μην υπάρχει ή το πραγματικό, ή το φανταστικό μέρος.

Πχ/ Το $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = \operatorname{Re}z + i\dfrac{(\operatorname{Re}z)\operatorname{Im}z}{\operatorname{Re}z - \operatorname{Im}z} \nexists$, δηλ.

το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x + i\dfrac{xy}{x-y}\right) \nexists \Leftarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$ αλλά

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x-y} \nexists$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

$f: D \longrightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$

(α) αν $a \in \mathbb{C}$ σημ. συσσ. του D, τότε $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$

$:\Leftrightarrow \forall\, r > 0\ \exists\, \delta > 0 : \forall\, z \in D,\ 0 < |z-a| < \delta\ ,\ |f(z_n)| > r$

$\Leftrightarrow \forall\, (z_n) \subset D \setminus \{a\},\ z_n \to a :\ ,\ \underbrace{f(z_n) \longrightarrow \infty}$

ΑΣΚΗΣΗ

$\Leftrightarrow \forall\, r > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$

$: \forall\, n \geq n_0 : |f(z_n)| > r$

(β) αν το D είναι μη-φραγμένο, τότε

$\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = b :\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, r > 0\ \forall\, z \in D,\ |z| > r :$

$|f(z) - b| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall (z_n) \subset D,\ z_n \to \infty : f(z_n) \to b$

(γ) αν το D είναι μη φραγμένο

τότε: $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty :\Leftrightarrow \forall\, r > 0\ \exists\, c > 0\ \forall\, z \in D,\ |z| > c$
$|f(z)| > r$

$\Leftrightarrow \forall\, (z_n) \subset D,\ z_n \longrightarrow \infty : f(z_n) \longrightarrow \infty$

ΑΣΚΗΣΗ Δ.Ο.

$$\lim_{z\to a}\frac{1}{(z-a)^n}=0, \qquad \lim_{z\to a}\frac{z^n}{e^{\sqrt[n]{|z|}}}=0$$

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\log z}{\sqrt[n]{z}}=0, \qquad \lim_{z\to a}\frac{\log(z-a)}{\sqrt[n]{z-a}}=\infty$$

[Για το πρώτο θνδο: $(z_k)\subset \mathbb{C}\setminus\{a\}$, $z_k\to a \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{(z_k-a)^n}\longrightarrow\infty}$$

$$\Leftrightarrow \forall r>0\ \exists k_0\ \forall k\geq k_0: \underbrace{\left|\frac{1}{(z_k-a)^n}\right|}>r$$

$$= \underbrace{\frac{1}{|z_k-a|^n}}$$

$$\Leftrightarrow |z_k-a|^n<\frac{1}{r}, \quad \frac{1}{r}=\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists k_0\ \forall k\geq k_0\ |z_k-a|^n<\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists k_0\ \forall k\geq k_0\ |z_k-a|<\sqrt[n]{\varepsilon} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists k_0\ \forall k\geq k_0: |z_k-a|<\varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_k\longrightarrow a$$

Άσκηση $f: D \to \mathbb{R}^{c\mathbb{C}}$, $D \subset \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ σ.σ. του D

και $\lim_{z \to a} f(z) = b \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow b \in \mathbb{R}$

Άσκηση

$$f(z) = \frac{1}{1-|z|}, \quad z \in D(0,1)$$

$$g(z) = \frac{1}{1-|z|}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0,1) \quad (E: |z| \leq 1)$$

Υπολογίστε αν υπάρχουν: $\lim_{z \to a} f(z)$, $\lim_{z \to a} g(z)$

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ορισμός

Η $f: D \to \mathbb{C}$ με $D \subset \mathbb{C}$ ονομάζεται

(α) συνεχής στο $\alpha \in D$ αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $\forall z \in D$, $|z-a| < \delta$: $|f(z) - f(a)| < \varepsilon$

(β) συνεχής στο $E \subset D$ αν είναι συνεχής σε κάθε $\alpha \in E$

(γ) συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε $\alpha \in D$ (συμβολικά: $f \in C(D)$)

(δ) ομοιόμορφα συνεχής: $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $\forall z, w \in D$, $|z-w| < \delta$: $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$

ΠΡΟΤΑΣΗ

(α) f συνεχής στο a

$\iff \forall (z_n) \subset D$, $z_n \to a$,

$f(z_n) \to f(a)$

(ε) (άλγεβρα συνεχών συναρτήσεων)

f, g συνεχείς στο a

$\Rightarrow f+g$, fg, $\frac{f}{g}$ $(g(a) \neq 0)$ συνεχής στο a.

(στ) $f: D \to \mathbb{C}$ συνεχής στο a

$g: E \to \mathbb{C}$ με $f(D) \subset E$ συνεχής στο $f(a)$

$\Rightarrow g \circ f: D \to \mathbb{C}$ συνεχής στο a

(η) D συμπαγές, $f: D \to \mathbb{C}$

f συνεχής $\Rightarrow f(D) \subset \mathbb{C}$ συμπαγές.

Ειδικότερα, αν $f: D \to \mathbb{R}$ συνεχής (και D συμπ)

τότε f έχει μέγιστη κι ελάχιστη τιμή

(ii) $f: D \to \mathbb{C}$ συνεχής στο a $\iff$ $\mathrm{Re} f : D \to \mathbb{R}$,

$\mathrm{Im} f : D \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο a

(iia) $\iff$ $f(x+iy) = \underbrace{\mathrm{Re} f(x+iy)}_{=u(x,y)} + i \underbrace{\mathrm{Im} f(x+iy)}_{=v(x,y)}$

δηλ. $\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ \forall \ (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, συνεχές (ως διανυσματικό πεδίο στο $D \subset \mathbb{R}^2$)

$\boxed{\text{SUPER-STANDARD-SOS}}$

Άσκηση

Οι σταθερή συνάρτηση, ταυτοτική συνάρτηση,
συνάρτηση πραγματικού μέρους
—||— φανταστικού
—||— απολ. τιμής
—||— του συζυγούς
πολυώνυμα, και ρητές συναρτ. των

$z, \bar{z}, \mathrm{Re} z, \mathrm{Im} z, |z|$ και συνδυασμοί τους
είναι συνεχείς συναρτήσεις (όπου ορίζονται)

Άσκηση

Η εκθετική $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής.